超楕円体の回転を用いた固有空間の補間

高橋　友和[†,††]　Lina[†]　井手　一郎[†]　目加田慶人[†††]　村瀬　洋[†]

† 名古屋大学 大学院情報科学研究科　〒 464–8603 愛知県名古屋市千種区不老町
†† 日本学術振興会
††† 中京大学 生命システム工学部
E-mail: †ttakahashi@murase.m.is.nagoya-u.ac.jp

あらまし　異なる 2 つの固有空間からその間の固有空間を滑らかに補間する手法を提案する．観測される複数のパターンを特徴空間中の多次元正規分布として統計的に表現することにより，観測時のノイズにロバストなパターン認識を行う研究が盛んに行われている．また，例えば撮影角度の変化にロバストな顔認識のように，撮影角度をパラメータとしたパターンの系列を扱う場合には，パラメータが連続的に変化するのに対して，パターンの観測が離散的にしか行われないことは認識性能を低下させる要因となる．提案手法は，多次元正規分布の補間を高次元空特徴空間内の超楕円体の回転として表現することにより，異なる固有空間の間を滑らかに補間するものである．実験では，様々な光源環境下で撮影された顔画像群を多次元正規分布として表現し，顔向きの異なる正規分布間を補間することにより，提案手法によって固有空間が滑らかに補間されていることを示す．

キーワード　パラメトリック固有空間，部分空間，補間，回転行列，多次元正規分布

Tomokazu TAKAHASHI[†,††], Lina[†], Ichiro IDE[†], Yoshito MEKADA[†††], and Hiroshi MURASE[†]

† Graduate School of Information Science, Nagoya University
Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya, 464–8603 Japan
†† Japan Sciety for the Promotion of Science
††† Department of Life System Science and Technoligy, Chukyo University, Japan
E-mail: †ttakahashi@murase.m.is.nagoya-u.ac.jp

We propose a method for interpolation between eigenspaces. Recent years, techniques that represent observed patterns as a multivariate normal distribution have actively been developed to be robust over the observation noises. In face recognition from images captured from various camera angles, one of causes degrading these performances is that patterns are observed during periodic intervals while the angles vary continuously. The proposed method interpolate between eigenpaces using an analogy from rotation of a hyperellipsoid in a high dimensional space. Experiments using face images captured in various illumination conditions demonstrate the proposed method could interpolate between distributions smoothly.

Subspace method, Parametric eigenspace method, Interpolation, Rotation matrix, Multivariate normal distribution

はじめに

観測される複数のパターンを特徴空間中の多次元正規分布として統計的に表現することにより，観測時のノイズにロバストなパターン認識を行う研究が盛んに行われている．アピアランスベースのパターン認識において，部分空間法　は，照明変動や物体の姿勢変化などの観測ノイズが発生する環境における高精度な認識を可能とし，これに関連する様々な研究が報告されている　．しかしながら，認識時の観測ノイズが学習時に想定したものよりも大きな変動を持つ場合，その認識性能は低下する．一方，パラメトリック固有空間法　は，学習段階において，物体の姿勢や光源方向などのノイズをパラメータとし

て制御することにより，認識対象の物体を表現する多様体を固有空間内に形成する．これによって，変動の大きなノイズを取り扱うことが可能となる．このとき，パラメータが連続的に変化するのに対して，観測パターンは離散的に取得されないため，隣接する観測パターン間を何らかの方法で補間することにより滑らかな多様体を形成する．しかしながら，この手法では，学習時にパラメータとして制御されないノイズに対しては，十分な認識性能が得られない．以上のように，観測時のノイズは学習時に制御可能なものと制御不能なものに大きく分けられる．我々は，パラメトリック固有空間法で観測パターン間を滑らかに補間するように，異なる　つの部分空間や固有空間の間を滑らかに補間することができれば，制御可能なノイズにはパラメトリック固有空間法のアプローチを，制御不能なものには部分空間法のアプローチを用いるような新しい認識のフレームが実現できると考える．

そこで本稿では，　つの固有空間の間を滑らかに補間する手法を提案する．我々は，多次元正規分布の情報を多様体上の各点に持たせることによって，学習時にパラメータとして制御されないノイズに対してもロバストなパラメトリック固有空間法の新しいフレームワークを提案してきた　．文献　では，物体の姿勢変化をパラメータとした多様体を形成する際に，物体の各姿勢について，切り出し位置ずれや回転，動きぶれなどのノイズを付加した学習画像群の平均ベクトルと共分散行列を計算しており，共分散行列間の補間を行う際には，単純に行列の各要素を補間するアプローチをとっている．固有空間の補間に対してもこのアプローチは適用可能であるが，この場合には固有値・固有ベクトルから共分散行列を計算し，共分散行列間を補間した後，補間された共分散行列の固有値・固有ベクトルを計算するといった処理を補間を行う度に必要であり，効率的ではない．多次元正規分布の等確率密度の点の集合は超楕円面を形成し，楕円体の姿勢（主軸の方向），主軸の長さは共分散行列の固有ベクトル，固有値にそれぞれ関係する．提案手法は　つの固有空間からその間を内挿，あるいは外挿する固有空間を超楕円体の主軸の回転と伸縮によって直接算出するものである．

　次元空間に限れば，物体の回転による姿勢の補間に関する研究は，コンピュータグラフィクスやコンピュータビジョンの分野において，古くから盛んに研究が進められている．そこでは，一般的にクォタニオンと呼ばれる数が用いられ，これを用いることによって　次元物体の姿勢の補間などの処理を効率的に行うことができる　．一方，　次元以上のより高次元の空間内での回転や姿勢補間に関する研究の報告は少ない　．これは，我々が　次元空間に存在しており，そのような解析への需要が少ないことが主な理由であると考えられる．しかし，パターン認識の分野で取り扱う特徴空間の次元は数百，数千にまで及ぶこともあり，高次元空間内における回転や姿勢補間には意義があると考える．

続く，　では高次回転行列の対角化を用いた補間について述べる．また，その幾何学的意味を考察し，単純な図形の姿勢補間の例を用いて，高次元空間内の物体の回転に対する理解を深める．提案手法の詳細は，　で述べる．　では，実データを用いた実験によって提案手法による固有空間の補間の妥当性を検証し，　で本稿をまとめる．

高次回転行列の補間

2.1　回転行列の対角化

n 次の実正方行列 ${}_n\boldsymbol{R}$ が以下の条件を満たすとき，${}_n\boldsymbol{R}$ は回転行列となる．

$$ {}_n\boldsymbol{R}\,{}_n\boldsymbol{R}^T \quad {}_n\boldsymbol{R}^T\,{}_n\boldsymbol{R} \quad {}_n\boldsymbol{I}, \qquad\qquad {}_n\boldsymbol{R} $$

$\boldsymbol{A}^T$ は $\boldsymbol{A}$ の転置行列を，${}_n\boldsymbol{I}$ は n 次の単位行列を表す．また，${}_n\boldsymbol{R}$ は n 次のユニタリ行列 ${}_n\boldsymbol{U}$ と複素数の対角行列 ${}_n\boldsymbol{D}$ を用いて以下のように対角化できる．

$$ {}_n\boldsymbol{R} \quad {}_n\boldsymbol{U}\,{}_n\boldsymbol{D}\,{}_n\boldsymbol{U}^\dagger $$

ここで，$\boldsymbol{A}^\dagger$ は $\boldsymbol{A}$ の複素共役転置行列を表す．また，任意の実数 x について，以下の式が成り立つ．

$$ {}_n\boldsymbol{R}^x \quad {}_n\boldsymbol{U}\,{}_n\boldsymbol{D}^x\,{}_n\boldsymbol{U}^\dagger $$

${}_n\boldsymbol{R}^x$ は　$< x <$　のときに ${}_n\boldsymbol{R}$ を内挿する回転を，それ以外のときに外挿を表す．つまり，任意の ${}_n\boldsymbol{R}$ が与えられたとき，${}_n\boldsymbol{U}$ を一度計算するだけで，${}_n\boldsymbol{R}$ の内挿と外挿が簡単に計算できる．

2.2　対角化の幾何学的な意味

回転角度パラメータ θ $-\pi < \theta < \pi$ を用いた　次回転行列 ${}_2\boldsymbol{R}\ \theta$ は，以下のように対角化できる

$$ {}_2\boldsymbol{R}\ \theta \quad {}_2\boldsymbol{U}\,{}_2\boldsymbol{D}\ \theta\ {}_2\boldsymbol{U}^\dagger $$

ここで，

$$ {}_2\boldsymbol{R}\ \theta \quad \begin{bmatrix} \theta & - & \theta \\ \theta & & \theta \end{bmatrix}, $$

$$ {}_2\boldsymbol{D}\ \theta \quad \begin{bmatrix} e^{i\theta} & \\ & e^{-i\theta} \end{bmatrix}. $$

ただし，$e^{i\theta}$　θ　i　θ（オイラーの等式，$|e^{i\theta}|$　$|\overline{e^{i\theta}}|$　）であり，$\overline{a}$ は a の複素共役を表す．さらに，実数 x に対して ${}_2\boldsymbol{D}\ \theta\ ^x$　${}_2\boldsymbol{D}\ x\theta$ となるから，${}_2\boldsymbol{R}\ \theta\ ^x$　${}_2\boldsymbol{R}\ x\theta$ が成り立つ．

${}_n\boldsymbol{R}$ の固有方程式は，n　m（偶数次元）のとき，絶対値　の m 組の複素共役解を持ち，n　m　（奇数次元）のとき，　と絶対値　の m 組の複素共役解を持つ　から，式　の ${}_n\boldsymbol{D}$ は m 次のパラメータベクトル $\boldsymbol{\theta}$　$\theta_j | -\pi < \theta_j < \pi, j$　，，$\cdots, m$ を用いて，以下のように表現できる．

$$ {}_n\boldsymbol{D}\ \boldsymbol{\theta} \begin{cases} \begin{bmatrix} {}_2\boldsymbol{D}\ \theta_1 & \cdots & \\ & & \\ & \cdots & {}_2\boldsymbol{D}\ \theta_m \end{bmatrix} & n \quad m \\ \begin{bmatrix} & \cdots & \\ {}_2\boldsymbol{D}\ \theta_1 & & \\ & & \\ \cdots & & {}_2\boldsymbol{D}\ \theta_m \end{bmatrix} & n \quad m \end{cases} $$

図 1　4 次元立方体の姿勢補間

また，式　は以下のように表現できる．

$$ {}_{n}\boldsymbol{R}\ \boldsymbol{\theta} \quad {}_{n}\boldsymbol{U}\,{}_{n}\boldsymbol{D}\ \boldsymbol{\theta}\ {}_{n}\boldsymbol{U}^{\dagger} $$

つまり，式　の $\boldsymbol{R}_n{}^{x}$ は $\boldsymbol{R}_n\ x\boldsymbol{\theta}$ の形，すなわち単なる角度パラメータベクトルの補間として計算できる．

さらに，

$$ {}_{n}\boldsymbol{R}\ \boldsymbol{\theta} \quad {}_{n}\boldsymbol{U}\,{}_{n}\boldsymbol{U}'^{\dagger}\,{}_{n}\boldsymbol{R}'\ \boldsymbol{\theta}\ {}_{n}\boldsymbol{U}'\,{}_{n}\boldsymbol{U}^{\dagger}. $$

ここで，$n \quad m \quad$ のとき，

$$ {}_{n}\boldsymbol{R}'\ \boldsymbol{\theta} \quad \begin{bmatrix} & & \cdots & \\ & {}_{2}\boldsymbol{R}\ \theta_1 & & \\ & & & \\ & \cdots & & {}_{2}\boldsymbol{R}\ \theta_m \end{bmatrix}, $$

$$ {}_{n}\boldsymbol{U}' \quad \begin{bmatrix} & & \cdots & \\ & {}_{2}\boldsymbol{U} & & \\ & & & \\ & \cdots & & {}_{2}\boldsymbol{U} \end{bmatrix}. $$

また，$n \quad m$ のときの ${}_{n}\boldsymbol{R}'\ \boldsymbol{\theta}$,${}_{n}\boldsymbol{U}'$ は，式　と同様に式　，　の　行目と　列目を削った形となる．回転行列全体の集合は乗算に対して群を作るから，${}_{n}\boldsymbol{U}\,{}_{n}\boldsymbol{U}'^{\dagger}$ は式　を満たす回転行列 ${}_{n}\boldsymbol{R}''$ に変換可能であり，${}_{n}\boldsymbol{R}\ \boldsymbol{\theta}$ は実数の回転行列のみを用いて以下のように表現することができる．

$$ {}_{n}\boldsymbol{R}\ \boldsymbol{\theta} \quad {}_{n}\boldsymbol{R}''\,{}_{n}\boldsymbol{R}'\ \boldsymbol{\theta}\ {}_{n}\boldsymbol{R}''^{T} $$

この表現を用いることにより，回転行列を補間する際のメモリ効率，計算効率の向上が期待できる．ただし，補間結果は，式　の単純な対角化を行ったときと等価である．${}_{n}\boldsymbol{R}'\ \boldsymbol{\theta}$ は m 個の独立な回転平面による回転を表し，ある回転が他の回転平面による回転に影響を与えることはない．つまり式　は，ある固有の姿勢への回転 ${}_{n}\boldsymbol{R}''$，互いに独立な回転平面での回転 ${}_{n}\boldsymbol{R}'\ \boldsymbol{\theta}$，もとの姿勢に戻す回転 ${}_{n}\boldsymbol{R}''^{T}$ の　つの回転によって ${}_{n}\boldsymbol{R}\ \boldsymbol{\theta}$ を表現している．

2.3　4 次元立方体の回転

上記の回転行列の補間を用いて，　次元の立方体の姿勢補間を行った．キーフレームとなる　つの姿勢を回転行列として与え，その間の姿勢を連続的に補間し，　次元空間に透視投影したものをワイヤフレーム表示することにより可視化した．キーフレームとして与える姿勢を $\boldsymbol{R}_0$，$\boldsymbol{R}_1$ とすると，その間の任意の姿勢 $\boldsymbol{R}_x$ は以下の式で表せる．

$$ \boldsymbol{R}_x \quad \boldsymbol{R}_{0\to 1}\ x\boldsymbol{\theta}\ \boldsymbol{R}_0 $$

ここで，$\boldsymbol{R}_{a\to b}\ \boldsymbol{\theta} \quad \boldsymbol{R}_b\boldsymbol{R}_a{}^{T}$ である．この式は回転行列の線形補間に相当しており，これを用いて双　次補間や　次補間も同様に定義できる．x を　から　まで変化させたときの　次元立方体の姿勢補間の様子を図　に示す．回転している様子をわかりやすくするために頂点の 1 つに関して，その軌跡を描画してある．

超楕円体の回転を用いた固有空間の補間

3.1　アプローチ

多次元正規分布の等確率密度の点の集合は超楕円面を形成する．提案手法は，　つの異なる多次元正規分布が与えられたとき，補間したい分布の平均ベクトルと共分散行列の固有値，固有ベクトルを，楕円体の中心の移動，主軸の伸縮，姿勢の回転を用いて，図　に示すように滑らかに補間する．平均ベクトルに関しては，単純な楕円体の中心の線形補間を行うものとする．一方，共分散行列の固有値，固有ベクトルは，主軸の伸縮，姿勢の回転を考慮して補間する．固有ベクトルは楕円体の姿勢，すなわち主軸の方向に，固有値は主軸の長さに関係する．

ここで，　つの楕円体の間の補間を考えたとき，楕円体の間の主軸の対応付け方法がその組み合わせ数だけ存在することと，楕円体が対称図形であるためにある　つの主軸が形成する回転平面での回転角が $\theta \quad a\pi$ a は任意の整数　の形で無数に表現できることから，一般的にそれらの間を補間した楕円体は一意に定めることはできない．これに対して，本稿では楕円体の主軸の伸縮による形状変化を最小とするような主軸の対応付けを選択することによって楕円体の補間方法を一意に定める．なお，上記の主軸の対応付けの妥当性に関しては，本稿では次節の実験結果を用いて示すのみに留めるが，今後，より適切な対応付け手法の検討や対応付けの理論的な妥当性の検証が必要であると考える．

3.2　アルゴリズム

$\boldsymbol{\mu}$ を n 次元の平均ベクトル，$\boldsymbol{\Sigma}$ を $n \times n$ の共分散行列として，　つの多次元正規分布を ${}_{0}\ \boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0$ ，${}_{1}\ \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_1$ で表すとき，任意の実数 x によってその間を内挿，あるいは外挿した ${}_{x}\ \boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\Sigma}_x$ を以下のように算出する．

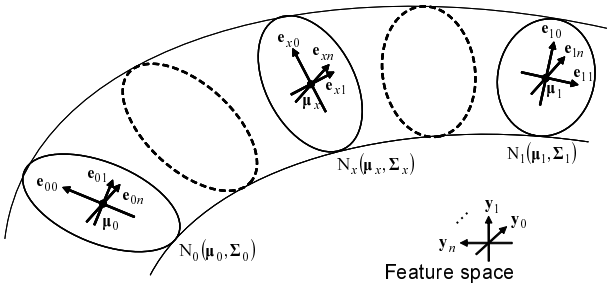

図 2　超楕円体の補間

3.2.1　平均ベクトルの補間

$\boldsymbol{\mu}_x$ は，単純な線形補間を用いて以下のように算出する．これは楕円体の中心の補間に相当する．

$$\boldsymbol{\mu}_x \quad - x \ \boldsymbol{\mu}_0 \quad x\boldsymbol{\mu}_1$$

3.2.2　固有値・固有ベクトルの補間

$\boldsymbol{\Sigma}_0$，$\boldsymbol{\Sigma}_1$ の固有値，固有ベクトルは楕円体の主軸の長さ，姿勢の情報をそれぞれ持っている．$\boldsymbol{\Sigma}_0$，$\boldsymbol{\Sigma}_1$ の各固有ベクトルを列ベクトル $\boldsymbol{e}_{0j}, \boldsymbol{e}_{1j}$ j ，$,\cdots,n$ として並べて作成した行列を，それぞれ $\boldsymbol{E}_0$，$\boldsymbol{E}_1$ とし，そのときの固有値 $\lambda_{0j}, \lambda_{1j}$ j ，$,\cdots,n$ を並べたベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{\lambda}_0$，$\boldsymbol{\lambda}_1$ とする．これらに対して，以下の操作を行う．

[Step1]　補間による楕円体の形状変化を最小とするような つの楕円体の主軸の対応付けを行うために，$\boldsymbol{E}_0$，$\boldsymbol{E}_1$ 内の固有ベクトルを固有値の大きい順に並べ替え，$\boldsymbol{E}'_0$，$\boldsymbol{E}'_1$ を得る．また，$\boldsymbol{\lambda}_0$，$\boldsymbol{\lambda}_1$ 内の固有値もそれに合わせて並べ替え，$\boldsymbol{\lambda}'_0$，$\boldsymbol{\lambda}'_1$ を得る．

[Step2]　固有ベクトルの符号の不定性を解決することを目的として，対応付けられた主軸の間の角度の絶対値が $\frac{\pi}{2}$ 以下となるように，j ，$,\cdots,n$ について $\boldsymbol{e}'_{0j}{}^T\boldsymbol{e}'_{1j} <$ ならば，$\boldsymbol{e}'_{1j}$ の方向を反転する（各要素の符号を反転する）．

[Step3]　$\boldsymbol{E}'_0$，$\boldsymbol{E}'_1$ が式 を満たし，楕円体の姿勢を表す回転行列となるようにするために，$\boldsymbol{E}'_0$ $-$ ならば，$\boldsymbol{e}'_{0n}$ の方向を反転する．同様に $\boldsymbol{E}'_1$ $-$ ならば，$\boldsymbol{e}'_{1n}$ の方向を反転する．

$\boldsymbol{\Sigma}_x$ の固有値 λ_{xj} j ，$,\cdots,n$ を以下のように算出する．

$$\lambda_{xj} \quad - x \ \sqrt{\lambda'_{0j}} \quad x\sqrt{\lambda'_{1j}}^{\ 2}$$

また，固有ベクトルを列ベクトルとして並べた行列 $\boldsymbol{E}_x$ を以下のように算出する．

$$\boldsymbol{E}_x \quad \boldsymbol{R}_{0\to 1} \ x\boldsymbol{\theta} \ \boldsymbol{E}'_0$$

ここで，$\boldsymbol{R}_{0\to 1}$ $\boldsymbol{\theta}$ $\boldsymbol{E}'_1\boldsymbol{E}'_0{}^T$ である．また，$\boldsymbol{\Sigma}_x$ は以下のように算出できる．

$$\boldsymbol{\Sigma}_x \quad \boldsymbol{E}_x\boldsymbol{\Lambda}_x\boldsymbol{E}_x{}^T$$

ここで，$\boldsymbol{\Lambda}_x$ は λ_{xj} j ，$,\cdots,n$ を対角要素とする対角行列である．

実画像を用いた検証実験

様々な光源環境の下で異なるカメラアングルから撮影された顔画像群を使用して，多次元正規分布の補間に関する実験を行った．光源環境の変化を観測時のノイズと考え，カメラアングル毎に顔画像群を多次元正規分布として表現し，それらの間の分布を補間する際，提案手法を利用する場合と利用しない場合での補間精度を比較することにより，提案手法の妥当性と有効性を検証した．

実験では顔画像データベース を使用し， 種類の光源環境下， つのカメラアングルから撮影された 人の人物画像の顔領域を切り出し，それぞれ × ピクセルに伸縮して用いた．図 に実験に用いた つのカメラアングルからの画像の例を示す．

はじめに，画像の画素値を並べたベクトルを全画像について作成し，それらを主成分分析することにより， 次元の低次元特徴空間を作成し，各画像をその特徴空間内のベクトルとして表現した．次に，カメラアングル毎に多次元正規分布を作成し，それらの間を補間して得られる分布とそれらのちょうど中間のカメラアングルから実際に得られた画像群の分布の間の距離を計算した．距離尺度には，分布間距離として一般的に用いられるバタチャリア距離 を用いた．提案手法の比較手法として，文献 で用いられている手法と同様，次式のように単純に共分散行列の各要素を線形補間する手法を用いた．

$$\boldsymbol{\Sigma}_x \quad - x \ \boldsymbol{\Sigma}_0 \quad x\boldsymbol{\Sigma}_1$$

なお，補間処理の実装や実験で用いた行列・数値計算，画像処理にはソフトウェアライブラリ を使用した．図 に，提案手法 ，比較手法 によって x を変化させながら補間した分布と実際の分布との間の距離を示す．また，図 に提案手法によって補間された固有ベクトルの一部を画像化したものを示す．

図 より，提案手法によって補間された分布は，ちょうど中間の x ．付近において実際の分布に最も接近していることから，提案手法による分布間補間の妥当性が示された．また，その距離が比較手法によって補間された分布のものよりも小さいことから，分布間を回転を用いて補間することの有効性が示された．

図 より，主観的な評価ではあるが，第 固有ベクトル（図中最右列）以外に関しては，提案手法による固有ベクトル間の補間が概ね良好に行われたと考える．第 固有ベクトルに関しては，固有ベクトル間の対応付けがうまくいかなかったと思われるため，今後，より適切な固有ベクトル間の対応付け手法の検討が必要であると考える．

む す び

本稿では，超楕円体の回転を用いた固有空間の補間手法を提案した．提案手法は，多次元正規分布の等確率密度面が超楕円面となることから， つの楕円体の間の姿勢の回転，主軸の伸縮を考えることにより， つの固有空間の間の滑らかな補間を

図 3　実験に用いた画像の例

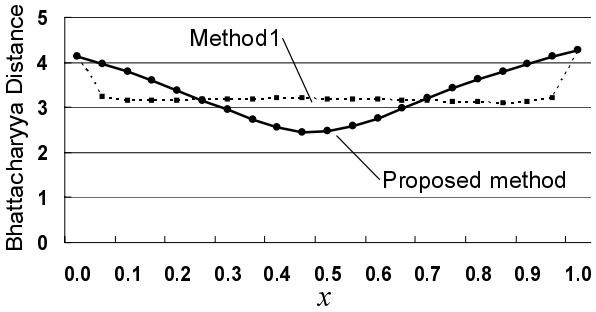

図 4　実 験 結 果

行うものであった．実画像を用いた実験の結果，提案手法による固有空間の補間の妥当性を確認できた．

今後は，楕円体の主軸間，固有ベクトル間の対応付けに関して，より適切な方法の検討，パラメトリック固有空間法や部分空間法による実際の認識問題への提案手法の適用を行っていきたい．また，本稿では回転の　次補間のみを扱ったが，　次スプライン補間等のより高次の補間についても検討したい．

謝辞　日頃より熱心に御討論頂く名古屋大学村瀬研究室諸氏に感謝する．本研究の一部は日本学術振興会科学研究費補助金，　世紀　　プログラム「社会情報基盤のための音声・映像の知的統合」による．本研究では顔画像データベース　　を用いた．

文　　献

[1] S. Watanabe and N. Pakvasa, “Subspace Method of Pattern Recognition,” Proc. 1st Int. J. Conf. on Pattern Recognition, pp. 25–32, 1971.

[2] M. Turk and A. Pentland, “Face Recognition Using Eigenfaces,” Proc. IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition, pp. 568–591, 1991.

[3] B. Moghaddam, “Principal Manifolds and Bayesian Subspaces for Visual Recognition,” Proc. Int. Conf. on Computer Vision, pp. 1131–1136, 1999.

[4] H. Murase and S. K. Nayar, “Illumination Planning for Object Recognition using Parametric Eigenspaces,” IEEE Trans. PAMI, vol. 16, no. 12, pp.1218-1227, 1994.

[5] Lina, Tomokazu Takahashi, Ichiro Ide, Hiroshi Murase, “Appearance Manifold with Embedded Covariance Matrix for Robust 3D Object Recognition,” Proceedings of IAPR Conference on Machine Vision Applications 2007, pp.504-507, May. 2007.

[6] 金谷一郎，“3D-CG プログラマーのためのクォータニオン入門，” 第二 I/O 編集部（編），工学社，2004 年.

[7] 金谷一郎，“3D-CG プログラマーのための実践クォータニオン，” 第二 I/O 編集部（編），工学社，2004 年.

[8] 渡辺啓蔵，“超表面の擬似反射による 4 次元超立体の可視化，” 日本バーチャルリアリティ学会論文誌，Vol. 10, No. 3, pp. 437–442, 2005.

[9] 佐武一郎，“線型代数学（第 64 版），” 裳華房，2006 年.

[10] A. S. Georghiades, P. N. Belhumeur and D. J. Kriegman, “From Few to Many: Illumination Cone Models for Face Recognition under Variable Lighting and Pose,” IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intelligence, Vol. 23, No. 6, pp. 643–660, 2001.

[11] Richard O. Duda, Peter E. Hart and David G. Stork, “Pattern Classification (Second Edition),” John Wiley & Sons, Inc., 2001.

[12] http://mist.suenaga.m.is.nagoya-u.ac.jp, “Media Integration Standard Toolkit.”

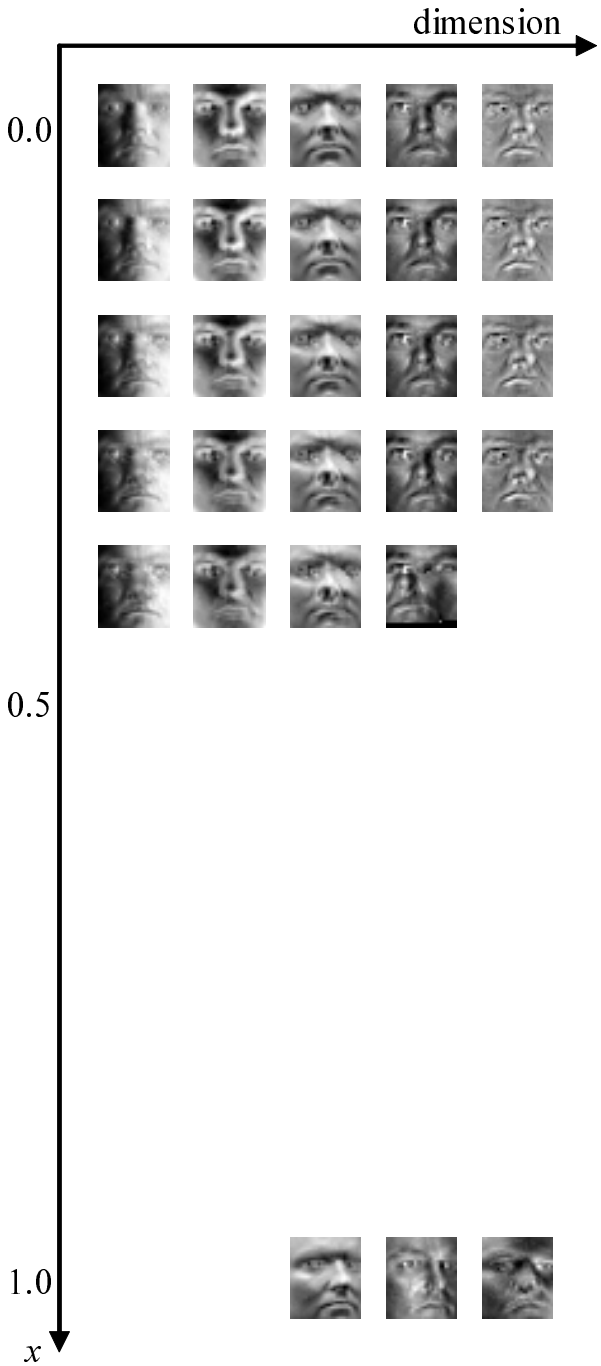

図 5　補間された固有ベクトル